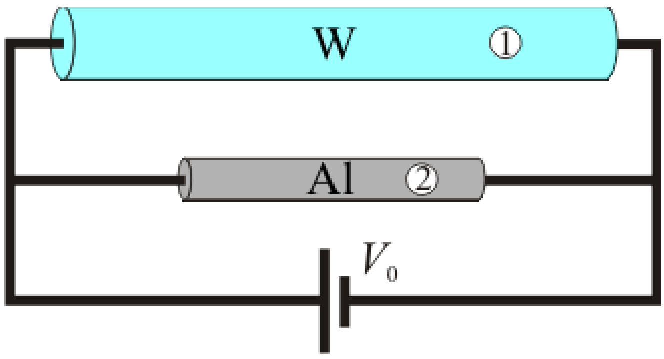
1 Enunciado



La longitud y el diámetro de una barra cilíndrica de wolframio o tungsteno (W) son el doble que los de otra barra de aluminio (Al). En ambos casos, la longitud de la barra es mucho mayor que su diámetro. Los extremos de ambas están conectados a los bornes o polos de una batería de fuerza electromotriz V_0 y resistencia interna despreciable, constituyendo una asociación de resistencias *en paralelo*. Sabiendo que la conductividad eléctrica del aluminio es prácticamente el doble que la del tungsteno, determine las relaciones entre las siguientes magnitudes:

1. Resistencias eléctricas de las barras e intensidades de corriente.
2. Densidad de corriente e intensidad del campo eléctrico en el interior de los conductores.

2 Solución

2.1 Consideraciones generales

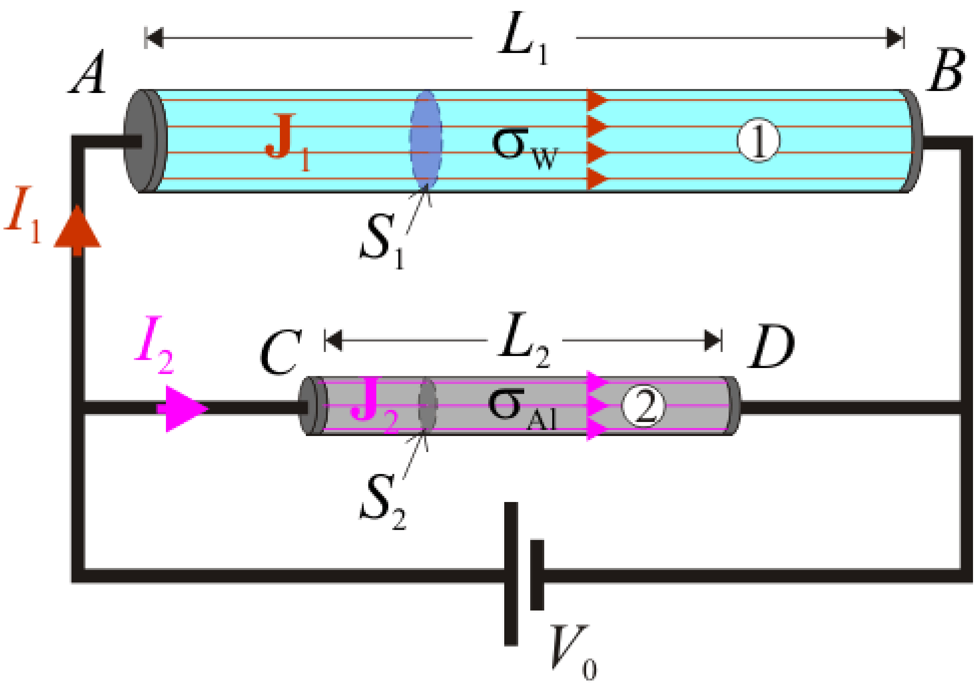
Comenzaremos con un planteamiento general del problema, repasando los diversos conceptos, ideas y resultados que pueden ser utilizados para resolver este ejercicio.

Para que las barras de tungsteno (conductor “1”) y aluminio (conductor “2”), estén conectados en paralelo, sus respectivos extremos A y C deben ser equipotenciales, así como los extremos B y D de dichas barras. De esta forma, cuando la asociación descrita se conecta a un generador caracterizado por una fuerza electromotriz $\mathcal{E} = V_0$ y resistencia interna despreciable (nula en el caso ideal), entre los extremos de ambas barras existirá la misma diferencia de potencial constante en el tiempo, que será:

$$R_{\text{gen}} \approx 0 \quad \Longrightarrow \quad V_A - V_B = V_C - V_D \approx V_0$$

Esta diferencial de potencial está intrínsecamente relacionada con la existencia un campo eléctrico que, en el interior de las barras “1” y “2” (medios óhmicos de conductividades σ_{W} y σ_{Al}, respectivamente), producirá corrientes eléctricas estacionarias descritas por sendas distribuciones volumétricas $\mathbf{J}_1(\mathbf{r})$ y $\mathbf{J}_2(\mathbf{r})$.

En el enunciado se indica que las longitudes de las barras son mucho mayores que sus respectivos diámetros, lo cual podemos interpretar como que sus secciones son lo suficientemente pequeñas como para poder aplicar la aproximación de **conductores filiformes**. Es decir, podemos considerar que las corrientes se distribuyen de manera uniforme en cada sección transversal de ambos conductores y que éstas van a ser equipotenciales. Como en el enunciado no se indica lo contrario, consideramos que las áreas S_1 y S_2 de dichas secciones transversales no cambian a lo largo del correspondiente conductor. De esta forma, si I_1 e I_2 son las respectivas intensidades de corriente estacionaria en las barras, se tendrá:



$$I_i = \int_{S_i} \mathbf{J}_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{S_i} |\mathbf{J}_i| \, \mathrm{d}S \approx |J_i| \, S_i$$

Además, las densidades de corriente en cada punto tendrán la dirección tangente al conductor en dicho punto. En el caso que nos ocupa, y tal como aparece en la figura, se considera que las barras conductoras son rectilíneas. Si $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son sendos vectores unitarios de direcciones constantes paralelas a las barras, se tendrá que:

$$\boxed{\mathbf{J}_1(\mathbf{r}) = \frac{I_1}{S_1}\, \mathbf{u}_1} \qquad \boxed{\mathbf{J}_2(\mathbf{r}) = \frac{I_2}{S_2}\, \mathbf{u}_2}$$

Hay que señalar que, en el caso de conductores rectilíneos, en que las distruciones de corriente estacionarias son constante en dirección y sentido, las anteriores soluciones son exactas.

Las líneas de los anteriores campos vectoriales en el interior de las barras constituyen sendos tubos de corrientes cuya resistencia eléctrica se define como la relación entre la diferencia de potencial a que están sometidas, y la intensidad que recorre cada una de las barras. En el caso de conductores filiformes (o de distribuciones uniformes de corrientes rectilíneas) en medios homogéneos de sección constante, el valor de la resistencia eléctrica es:

$$\boxed{R_i = \frac{V_{A,C} - V_{B,D}}{I_i} = \frac{L_i}{\sigma_i\, S_i}}$$

Recordemos cómo se obtiene tal resultado, calculando la diferencia de potencial entre los extremos de cada conductor/tubo de corriente a lo largo de sendos caminos paralelos a las barras y por el interior éstas:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{r}_i &= \mathrm{d}l\; \mathbf{u}_i \\ \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) &= \frac{\mathbf{J}_i}{\sigma_i} \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad V_{A,C} - V_{B,D} = \int_{A,C}^{B,D} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_i = \int_{A,C}^{B,D} \frac{I_i}{\sigma_i\, S_i}\, \mathrm{d}l$$

Y puesto que la conductividad es constante en cada medio, y la sección y la intensidad de las corrientes estacionarias son constante a lo largo de cada tubo, se obtiene

$$V_A - V_B = \frac{I_1}{\sigma_{\mathrm{W}}\, S_1} \int_A^B \mathrm{d}l = \frac{L_1}{\sigma_{\mathrm{W}}\, S_1}\, I_1 = R_1\, I_1$$

$$V_C - V_D = \frac{I_2}{\sigma_{\mathrm{Al}}\, S_2} \int_C^D \mathrm{d}l = \frac{L_2}{\sigma_{\mathrm{Al}}\, S_2}\, I_2 = R_2\, I_2$$

2.2 Relaciones entre las resistencias y las intensidades en los dos conductores

En el enunciado se indica que la longitud y el diámetro de la barra “1” son el doble que las de la barra “2”; en consecuencia, la sección de la barra de tungsteno es cuatro veces mayor que la de aluminio. Además, la conductividad de éste material es prácticamente el doble que la del tungsteno. Por tanto, la relación entre las resistencia eléctricas de ambos conductores será:

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= 2\, L_2 \\ S_1 &= \frac{\pi\, d_1^2}{4} = 4\, \frac{\pi\, (2d_2)^2}{4} = 4\, S_2 \\ \sigma_{\mathrm{Al}} &\approx 2\, \sigma_{\mathrm{W}} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{L_1\, \sigma_{\mathrm{Al}}\, S_2}{L_2\, \sigma_{\mathrm{W}}\, S_1} \approx 1}$$

Es decir, ambas barras tienen la misma resistencia eléctrica, aproximadamente. Por tanto, si entre sus extremos se establece la misma diferencia de potencial, las intensidades de corriente estacionaria que las recorran serán también prácticamente iguales:

$$V_A - V_B = V_C - V_D \approx V_0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{V_0/R_1}{V_0/R_2} = \frac{R_2}{R_1} \approx 1}$$

2.3 Relaciones entre las densidades de corriente y los campos en los dos conductores

Si las intensidades de corriente que recorren ambos conductores son las mismas, la relación entre las densidades de corriente que existen en ambos medios estarán determinadas por las secciones de las barras:

$$\boxed{\frac{|\mathbf{J}_1|}{|\mathbf{J}_2|} = \frac{I_1/S_1}{I_2/S_2} \approx \frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{4}}$$

Finalmente, la relación entre las intensidades del campo eléctrico en cada una de las barras estará determinada por la anterior relación y por la que guardan las conductividades de los medios:

$$\boxed{\frac{|\mathbf{E}_1|}{|\mathbf{E}_2|} = \frac{|\mathbf{J}_1|/\sigma_{\mathrm{W}}}{|\mathbf{J}_2|/\sigma_{\mathrm{Al}}} = \frac{|\mathbf{J}_1|}{|\mathbf{J}_2|}\,\frac{\sigma_{\mathrm{Al}}}{\sigma_{\mathrm{W}}} = \frac{1}{2}}$$

Obsérvese que este mismo resultado puede obtenerse teniendo en cuenta que si las densidades de corriente en el interior de las barras son uniformes, los correspondientes campos eléctricos también deben serlo y que, además, la circullación de éstos a lo largo de los conductores debe ser, en ambos casos, igual al valor V_0:

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= \int_A^B \mathbf{E}_1 \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_1 = |\mathbf{E}_1| \int_A^B \mathrm{d}l = |\mathbf{E}_1|\, L_1 \\ V_0 &= \int_C^D \mathbf{E}_2 \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_2 = |\mathbf{E}_2| \int_C^D \mathrm{d}l = |\mathbf{E}_2|\, L_2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{|\mathbf{E}_1|}{|\mathbf{E}_2|} = \frac{L_2}{L_1} = \frac{1}{2}}$$